

Beam-beam effects

Reference

- **Concept of Luminosity (in particle colliders)**
Werner Herr, CERN Bruno Muratori, Daresbury Laboratory

Beam-Beam Effects in Particle Colliders, Mauro Pivi SLAC

Colliders in the world

LHC

SuperKEKB

ILC

TABLE 2: The LHC list of parameters: proton–proton collider design parameters.

Parameter	Symbol/Units	Nominal	Low N	Large Y	Low P
Repetition rate	f_{rep} (Hz)	5	5	5	5
Number of particles per bunch	N (10^{10})	2	1	2	2
Number of bunches per pulse	n_b	2625	5120	2625	1320
Bunch interval in the Main Linac	t_b (ns)	369.2	189.2	369.2	480.0
in units of RF buckets		480	246	480	624
Average beam current in pulse	I_{ave} (mA)	9.0	9.0	9.0	6.8
Normalized emittance at IP	$\gamma\epsilon_x^*$ (mm-mrad)	10	10	10	10
Normalized emittance at IP	$\gamma\epsilon_y^*$ (mm-mrad)	0.04	0.03	0.08	0.036
Beta function at IP	β_x^* (mm)	20	11	11	11
Beta function at IP	β_y^* (mm)	0.4	0.2	0.6	0.2
R.m.s. beam size at IP	σ_x^* (nm)	639	474	474	474
R.m.s. beam size at IP	σ_y^* (nm)	5.7	3.5	9.9	3.8
R.m.s. bunch length	σ_z (μ m)	300	200	500	200
Disruption parameter	D_x	0.17	0.11	0.52	0.21
Disruption parameter	D_y	19.4	14.6	24.9	26.1
Beamstrahlung parameter	Υ_{ave}	0.048	0.050	0.038	0.097
Energy loss by beamstrahlung	δ_{BS}	0.024	0.017	0.027	0.055
Number of beamstrahlung photons	n_γ	1.32	0.91	1.77	1.72
Luminosity enhancement factor	H_D	1.71	1.48	2.18	1.64
Geometric luminosity	$\mathcal{L}_{geo}$ $10^{34}/\text{cm}^2/\text{s}$	1.20	1.35	0.94	1.21
Luminosity	$\mathcal{L}$ $10^{34}/\text{cm}^2/\text{s}$	2	2	2	2

Proton collider (Design parameters)				SuperKEKB		Units
				LER (e^+)	HER (e^-)	
Energy	E	TeV	7.0			
Dipole field	B	T	8.65			GeV
Luminosity	$\mathcal{L}$	$\text{cm}^{-2}\text{s}^{-1}$	10^{34}			m
Beam–beam parameter	ξ		0.0032			mmrad
Total beam–beam tune spread*			0.01			
Injection energy	E_i	GeV	450			rad
Circulating current/beam	I_{beam}	A	0.53			nm
Number of bunches	k_b		2835			pm
Harmonic number	h_{rf}		35640			mm
Bunch spacing	τ_b	ns	25			μm
Particles per bunch	n_b		1×10^{11}			nm
Stored beam energy	E_s	MJ	332			10^{-4}
Normalized transverse emittance: $(\beta\gamma)\sigma^2/\beta$	ϵ^*	mmrad	3.75×10^{-6}			10^{-4}
R.m.s bunch length	σ_s	m	0.075			
Collisions						
Beta-value at I.P.	β^*	m	0.5			A
R.m.s. beam radius at I.P.	σ^*	μm	16			
R.m.s. divergence at I.P.	σ'^*	μrad	32			
Luminosity per bunch collision	$\mathcal{L}_b$	cm^{-2}	3.2×10^{26}			MeV
Crossing angle	ϕ	μrad	200			ms
Number of events per crossing	n_c		19			MHz
Beam lifetime	τ_b	h	22			
Luminosity lifetime	τ_l	h	10			MV
Nuclear events per IP per s	n_{nucl}	s^{-1}	1.0×10^9			MW
Inelastic events per IP per s	n_{inel}	s^{-1}	6.0×10^8			mm
Elastic events per IP per s	n_{elist}	s^{-1}	4.0×10^8			
Synchrotron radiation (top energy)						
Energy loss per turn	U_0	keV	6.9			$\text{cm}^{-2}\text{s}^{-1}$
Critical photon energy	u_c	eV	45.6			ab^{-1}
Total radiated power per beam	P_s	kW	3.7			
Power per unit length for two beams	P_m	W m^{-1}	0.44			
Transverse damping time	τ_x	h	24.9			
Longitudinal damping time	τ_s	h	12.5			
Beam energy	E			4.0	7.007	GeV
Circumference	C			3016.315		m
Half crossing angle	θ_x			41.5		mmrad
Piwinski angle	ϕ_{piw}			24.6	19.3	rad
Horizontal emittance	ϵ_x			3.2 (1.9)	4.6 (4.4)	nm
Vertical emittance	ϵ_y			8.64	12.9	pm
Beta function at IP	β_x^*/β_y^*			32/0.27	25/0.30	mm
Horizontal beam size at IP	σ_x^*			10.1	10.7	μm
Vertical beam size at IP	σ_y^*			48	62	nm
Momentum compaction	α_p			3.20	4.55	10^{-4}
Energy spread	σ_E			7.92(7.53)	6.37(6.30)	10^{-4}
Beam current	I			3.60	2.60	A
Number of bunches	n_b			2500		
Energy loss/turn	U_0			1.76	2.43	MeV
Long. damping time	τ_z			22.8	29.0	ms
RF frequency	f_{RF}			508.9		MHz
Total cavity voltage	V_c			9.4	15.0	MV
Total beam power	P_b			8.3	7.5	MW
Bunch length	σ_z			6.0 (4.7)	5.0 (4.9)	mm
Beam–beam parameter	ξ_x/ξ_y			0.0028/0.088	0.0012/0.081	
Luminosity	L			8×10^{35}		$\text{cm}^{-2}\text{s}^{-1}$
Integrated luminosity	$\int L$			50		ab^{-1}

*With two high-luminosity IP + distant crossings.

Colliders in the world

FCC

Table 1: FCC-ee baseline parameters compared to LEP1 and LEP2

	(LEP1)	(LEP2)	Z	W	H	tt
Circumference [km]	26.7	26.7	100	100	100	100
Bending radius [km]	3.1	3.1	11	11	11	11
Beam energy [GeV]	45.4	104	45.5	80	120	175
Beam current [mA]	2.6	3.04	1450	152	30	6.6
Bunches / beam	12	4	16700	4490	1360	98
Bunch population [10 ¹¹]	1.8	4.2	1.8	0.7	0.46	1.4
Transverse emittance ϵ						
- Horizontal [nm]	20	22	29.2	3.3	0.94	2
- Vertical [pm]	400	250	60	7	1.9	2
Momentum comp. [10 ⁻⁵]	18.6	14	18	2	0.5	0.5
Betatron function at IP β^*						
- Horizontal [m]	2	1.2	0.5	0.5	0.5	1
- Vertical [mm]	50	50	1	1	1	1
Beam size at IP σ^* [μ m]						
- Horizontal	224	182	121	41	22	45
- Vertical	4.5	3.2	0.25	0.084	0.044	0.045
Bunch length [mm]						
- Synchrotron radiation	8.6	11.5	1.64	1.01	0.81	1.16
- Total	8.6	11.5	2.56	1.49	1.17	1.49
Energy loss / turn [GeV]	0.12 ⁽¹⁾	3.34	0.03	0.33	1.67	7.55
SR power / beam [MW]	0.3 ⁽¹⁾	11	50	50	50	50
Total RF voltage [GV]	0.24	3.5	2.5	4	5.5	11
RF frequency [MHz]	352	352	800	800	800	800
Longitudinal damping time τ_E [turns]	371	31	1320	243	72	23
Energy acceptance RF [%]	1.7	0.8	2.7	7.2	11.2	7.1
Synchrotron tune Q_s	0.065	0.083	0.65	0.21	0.096	0.10
Polarization time τ_p [min]	252	4	11200	672	89	13
Hourglass factor H	1	1	0.64	0.77	0.83	0.78
Luminosity/IP [10 ³⁴ cm ⁻² s ⁻¹]	0.002	0.012	28.0	12.0	6.0	1.8
Beam-beam parameter						
- Horizontal	0.044	0.040	0.031	0.060	0.093	0.092
- Vertical	0.044	0.040	0.030	0.059	0.093	0.092
Luminosity lifetime [min]	1750	434	298	73	29	21

CEPC

	Higgs	W	Z (3T)	Z (2T)
Number of IPs	2			
Beam energy (GeV)	120	80	45.5	
Circumference (km)	100			
Synchrotron radiation loss/turn (GeV)	1.73	0.34	0.036	
Crossing angle at IP (mrad)	16.5×2			
Piwinski angle	3.48	7.0	23.8	
Particles /bunch N_e (10^{10})	15.0	12.0	8.0	
Bunch number	242	1524	12000 (10% gap)	
Bunch spacing (ns)	680	210	25	
Beam current (mA)	17.4	87.9	461.0	
Synch. radiation power (MW)	30	30	16.5	
Bending radius (km)	10.7			
Momentum compaction (10^{-5})	1.11			
β function at IP β_x^* / β_y^* (m)	0.36/0.0015	0.36/0.0015	0.2/0.0015	0.2/0.001
Emittance x/y (nm)	1.21/0.0024	0.54/0.0016	0.18/0.004	0.18/0.0016
Beam size at IP σ_x / σ_y (μm)	20.9/0.06	13.9/0.049	6.0/0.078	6.0/0.04
Beam-beam parameters ξ_x / ξ_y	0.018/0.109	0.013/0.123	0.004/0.06	0.004/0.079
RF voltage V_{RF} (GV)	2.17	0.47	0.10	
RF frequency f_{RF} (MHz)	650			
Harmonic number	216816			
Natural bunch length σ_z (mm)	2.72	2.98	2.42	
Bunch length σ_z (mm)	4.4	5.9	8.5	
Damping time $\tau_x / \tau_y / \tau_E$ (ms)	46.5/46.5/23.5	156.4/156.4/74.5	849.5/849.5/425.0	
Natural Chromaticity	-468/-1161	-468/-1161	-491/-1161	-513/-1594
Betatron tune ν_x / ν_y	363.10 / 365.22			
Synchrotron tune ν_s	0.065	0.040	0.028	
HOM power/cavity (2 cell) (kw)	0.46	0.75	1.94	
Natural energy spread (%)	0.100	0.066	0.038	
Energy spread (%)	0.134	0.098	0.080	
Energy acceptance requirement (%)	1.35	0.90	0.49	
Energy acceptance by RF (%)	2.06	1.47	1.70	
Photon number due to beamstrahlung	0.082	0.050	0.023	
Beamstrahlung lifetime /quantum lifetime [†] (min)	80/80	>400		
Lifetime (hour)	0.43	1.4	4.6	2.5
F (hour glass)	0.89	0.94	0.99	
Luminosity/IP ($10^{34} \text{ cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$)	3	10	17	32

[†] include beam-beam simulation and real lattice

Luminosity

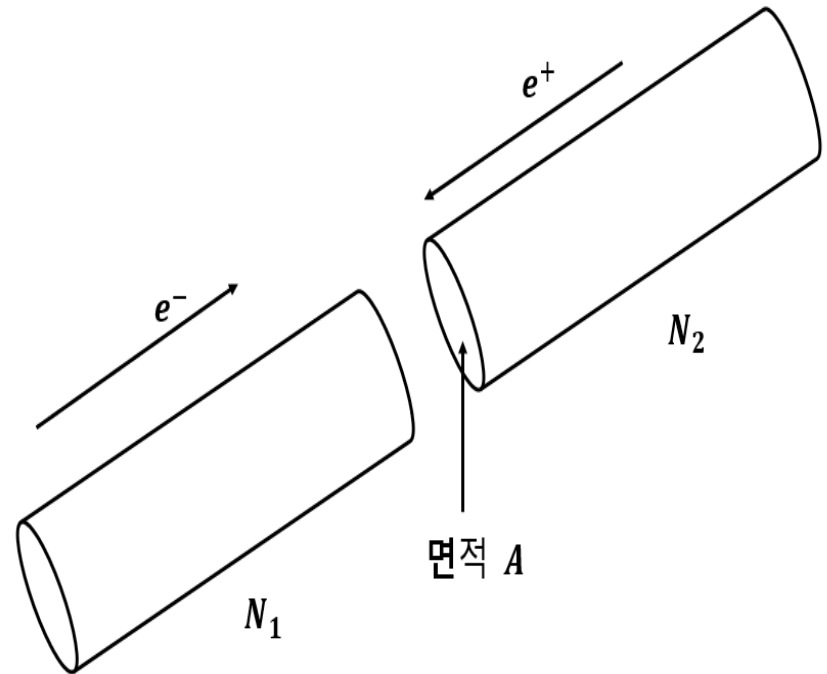
- N_1, N_2 : 전자, 양전자 빔내 입자수
- 빔 단면적 : A
- 빔의 충돌 단면적 : σ
- 양전자빔 충돌 확률 : $N_2\sigma$
- 단위 면적당 양전자 빔 충돌확률 : $\frac{N_2\sigma}{A}$
- 전자와 양전자가 충돌할 확률: $\frac{N_1N_2\sigma}{A}$

빔이 저장링에서 1초당 회전 주파수(f)만큼 충돌,
1초당 전자와 양전자가 충돌을 일으키는 확률

- 충돌율 (event rate) : $R = \frac{fN_1N_2\sigma}{A}$
- Luminosity : $L = \frac{fN_1N_2}{A}$ ($R = L\sigma$).

한 종류의 빔에 k 개의 번치가 있는 경우는

$$L = \frac{kfN_1N_2}{A}.$$



Luminosity

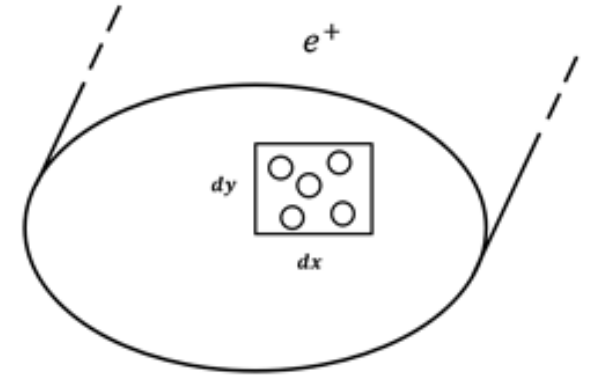
가우션 분포의 전자빔, 양전자빔 경우 luminosity ::

양전자빔 면적 요소인 $dx dy$ 내 입자수 dN_2

$$dN_2 = \frac{N_2}{2\pi ab} \exp\left(-\frac{x^2}{2a^2} - \frac{y^2}{2b^2}\right) \quad (a = \sigma_x, b = \sigma_y)$$

한 개의 전자가 양전자빔 $dx dy$ 와 충돌할 확률은 $\frac{\sigma dN_2}{dx dy}$
여기에 들어가는 전자수 dN_1 은

$$dN_1 = \frac{N_1}{2\pi ab} \exp\left(-\frac{x^2}{2a^2} - \frac{y^2}{2b^2}\right) dx dy$$



Luminosity

$dx dy$ 영역에서 전자·양전자 빔이 충돌하는 확률 dR 은

$$dR = \frac{f\sigma dN_1 dN_2}{dxdy}.$$

이때 Luminosity dL 은

$$dL = \frac{f dN_1 dN_2}{dxdy} = \frac{f N_1 N_2}{4\pi^2 a^2 b^2} \exp\left(-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right) dxdy$$

총 Luminosity

$$\begin{aligned} L &= \frac{f N_1 N_2}{4\pi^2 a^2 b^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{a^2}} dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{b^2}} dy \\ &= \frac{f N_1 N_2}{4\pi^2 ab} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-X^2} dX \int_{-\infty}^{\infty} e^{-Y^2} dY \\ &= \frac{f N_1 N_2}{4\pi ab} = \frac{f N_1 N_2}{4\pi\sigma_x\sigma_y} \end{aligned}$$

Luminosity

k 개의 번치가 상대방 빔과 충돌할 때는

$$L = \frac{kfN_1N_2}{4\pi\sigma_x\sigma_y} .$$

빔 전류가 $I = Qf = ekNf$ 일때

$$L = \frac{1}{4\pi kf} \frac{I_1 I_2}{e^2} \frac{1}{\sigma_x \sigma_y} \text{ 이 되며}$$

충돌지점에서 β 함수를 β_x^*, β_y^* 로 놓으면

$$L = \frac{1}{4\pi kf} \frac{I_1 I_2}{e^2} \frac{1}{\sqrt{\beta_x^* \beta_y^*} \sqrt{\epsilon_x \epsilon_y}}$$

충돌지점에서 빔 사이즈를 작게 하여 Luminosity를 크게 하는 것이 중요하다.

Luminosity in LHC

$$N_1 = N_2 = 1.15 \times 10^{11} \text{ particles/bunch}$$

$$n_b = 2808 \text{ bunches/beam}$$

$$f = 11.2455 \text{ KHz}$$

$$\phi = 285 \mu\text{rad}$$

$$\sigma_x^* = \sigma_y^* = 16.6 \mu\text{m}$$

$$\sigma_z = 7.7 \text{ cm}$$

$$\beta_x^* = \beta_y^* = 0.55 \text{ m}$$

Head – on collision

$$L = 1.2 \times 10^{34} \text{ cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$$

Effect of crossing angle

$$L = 0.973 \times 10^{34} \text{ cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$$

Effect of crossing angle and Hourglass

$$L = 0.969 \times 10^{34} \text{ cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$$

Luminosity

$$1 \text{ barn} = 10^{-28} \text{m}^2 = 100 \text{fm}^2 \qquad 1 \text{ fm}^2 = 10^{-15} \text{m} \times 10^{-15} \text{m} = 10^{-30} \text{m}^2$$
$$1 \text{ fb} = 10^{-15} \times 10^{-28} \text{m}^2 = 10^{-43} \text{m}^2 \qquad 1 \mu\text{b} = 10^{-34} \text{m}^2$$

- Inverse femto barn (fb^{-1}) is unit used to measure the number of particle collision events per femto barn of target cross-section.

is conventional unit for time – integrated Luminosity.

- Instantaneous luminosity of $300 \times 10^{30} \text{cm}^{-2} \text{s}^{-1} = 300 \mu\text{b}^{-1} \text{s}^{-1}$

(if 8 hours Run, 8 hours = 28800 second)

$$1 \mu\text{b}^{-1} = 10^{34} / \text{m}^2 = 10^{30} / \text{cm}^2$$

$$= 8640000 \mu\text{b}^{-1} = 8.64 \text{pb}^{-1} = 0.00864 \text{fb}^{-1}$$

- If this is multiplied by the cross-section, then a dimensionless number is obtained equal to number of scattering events.

Luminosity

충돌수 = σ (scattering cross-section) $\times$ *Luminosity* (충돌수/단위시간/단위면적)

To find actual number of collisions for any particular process

$$\text{충돌수} = \sigma \times \int L dt \quad \int L dt = 1/\text{area}$$

The unit of this value is 1/area and the inverse femto barn turns out to be roughly magnitude for measuring $\int L dt$

Integrated Luminosity $L_{inte} = \int_0^{T_{store}} L dt$ T_{store} = 빔이 저장된 시간

예를 들면 RHIC은 2013년 편광 양성자빔을 4달 동안 $540 pb^{-1}$ 운전 제공하였다.

Beam-beam Tune shift

양전자빔 속의 반경 r ($r < a$)의 위치에서 전기장은

$$\nabla \cdot E = \frac{\rho}{\epsilon} \text{ 로 부터 } \int E \cdot n da = \frac{\int \rho dV}{\epsilon}$$

$$E_r = \frac{\pi r^2 l \rho}{2\pi r l \epsilon} = \frac{\rho r}{2\epsilon} \text{ 이 된다.}$$

양전자빔의 전류밀도 j 는

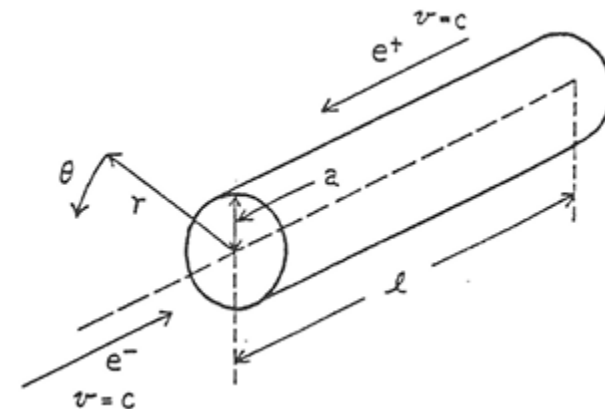
$$\nabla \times H = j \text{ 로 부터 } \int H \cdot dl = \int j \cdot da$$

$$j = \rho v = \rho c$$

$$H_\theta = \frac{\rho c \pi r^2}{2\pi r} = \frac{\rho r c}{2} = \frac{\rho r}{2c\mu\epsilon}$$

a : 양전자빔의 반경
 l : 양전자빔의 길이
 ρ : 양전자빔의 밀도

$$\therefore E_r = \mu c H_\theta$$



Beam-beam Tune shift

로렌쯔 힘 $F = q(E + v \times B)$

전자의 x 방향 운동 방정식은 양전자빔 속에서는

$$F_x = \frac{dP_x}{dt} = -e \left(\frac{\rho x}{2\varepsilon} + c \frac{\rho x \mu}{2c\mu\varepsilon} \right) = -\frac{e\rho x}{\varepsilon} \quad (v = -c)$$

전자가 양전자빔 속으로 운동하는 동안에 받는 운동량 변화는

$$\Delta P_x = -e \int \frac{\rho x}{\varepsilon} dt$$

전자가 양전자빔 속으로 진행하는데 걸리는 시간은

$$\Delta t = \frac{l}{2c}$$
$$\Delta P_x = -\frac{e\rho l}{2c\varepsilon} x$$

Beam-beam Tune shift

$$\rho = \frac{eN_2}{\pi a^2 l} \text{이므로}$$

$$\Delta x' = \frac{\Delta P_x}{P} = -\frac{e^2 N_2}{2Pc\pi a^2 \varepsilon} x = -\frac{2r_e N_2}{\gamma a^2} x \quad \left(mc^2 = \frac{e^2}{4\pi \varepsilon r_e} \right)$$

우변항은 저장링에 집속력으로 부가되었다고 볼 수 있으므로
이때의 tune shift 즉, beam-beam tune shift는

$$\Delta \nu_x = -\frac{\Delta x'}{x} \frac{\beta_x^*}{4\pi} = \frac{r_e N_2 \beta_x^*}{2\pi \gamma a^2}, \quad (\beta_x^* \text{는 충돌지점 } \beta \text{ 함수})$$

$$\left(\Delta \nu = \frac{k\beta}{4\pi}, \quad k = -\frac{\Delta x'}{x} \right)$$

$$\Delta \nu_y = \frac{r_e N_2 \beta_y^*}{2\pi \gamma a^2}$$

Beam-beam Tune shift

반경 r 이 $r \leq a$ 일때, 힘은 선형이고 그 범위에 있는 전자의 경우 위의 Tune shift를 사용할 수 있지만, 그 범위를 벗어나면 힘은 비선형이 되고 위 식을 적용할 수 없다.

실제로 양전자와 전자빔의 밀도는 가우션 분포를 하며 힘은 어떤 위치에서나 비선형이다. 미소 진폭 전자에 작용하는 힘을 고려하고 이에 따른 tune shift를 linear tune shift라 한다.

$$\begin{aligned} \Delta x' &= -\frac{2r_e N_2}{\gamma a^2} x & \sigma_x \neq \sigma_y & \quad \Delta x' = -\frac{2r_e N_2}{\gamma a^2} \frac{x}{\sigma_x(\sigma_x + \sigma_y)} & \quad \Delta \nu_x = \frac{r_e N_2 \beta_x^*}{2\pi\gamma\sigma_x(\sigma_x + \sigma_y)} \\ \Delta y' &= -\frac{2r_e N_2}{\gamma a^2} y & \sigma_x \neq \sigma_y & \quad \Delta y' = -\frac{2r_e N_2}{\gamma a^2} \frac{y}{\sigma_y(\sigma_x + \sigma_y)} & \quad \Delta \nu_y = \frac{r_e N_2 \beta_y^*}{2\pi\gamma\sigma_x(\sigma_x + \sigma_y)} \end{aligned}$$

Beam-beam in storage ring

- 충돌형 저장링에서 1-turn 선형 전송과 충돌지점에서 빔-빔 영향을 고려한다
1-turn 전송 행렬은

$$M_1 = \begin{pmatrix} \cos 2\pi\nu_y & \beta_y \sin 2\pi\nu_y \\ -\frac{1}{\beta_y} \sin 2\pi\nu_y & \cos 2\pi\nu_y \end{pmatrix}$$

강도 δ 의 수직방향 빔-빔 킥은 사극자석의 킥과 같이 주어질 수 있다.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\delta & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left(\delta = \frac{2Nr_e}{\gamma\sigma_y(\sigma_x + \sigma_y)}, \quad \Delta y' = -\frac{y}{f}, \quad \frac{1}{f} = k = \delta \right)$$

Beam-beam in storage ring

·빔-빔 상호작용을 조합한 수직방향 1-turn 행렬은

$$M = M_1 \cdot B = \begin{pmatrix} \cos(2\pi\nu_y) - \delta \beta_y \sin(2\pi\nu_y), & \beta_y \sin(2\pi\nu_y) \\ -\frac{1}{\beta_y} \sin(2\pi\nu_y) - \delta \cos(2\pi\nu_y), & \cos(2\pi\nu_y) \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} \cos(2\pi(\nu_y + \xi_y)) & \beta_y \sin(2\pi(\nu_y + \xi_y)) \\ -\frac{1}{\beta_y} \sin(2\pi(\nu_y + \xi_y)) & \cos(2\pi(\nu_y + \xi_y)) \end{pmatrix}$$

빔-빔 상호작용후 튠은 작은 섭동 $\nu_y + \xi_y$ 으로 가정한다.

Beam-beam in storage ring

행렬의 대각선 항을 서로 같게 놓으면

$$\text{Tr}(M) = 2 \cos 2\pi (\nu_y + \xi_y) = 2 \cos(2\pi \nu_y) - \beta_y \delta \sin(2\pi \nu_y)$$

Incoherent beam-beam Tune shift :

$$2 \cos 2\pi \nu_y \cos 2\pi \xi_y - 2 \sin 2\pi \nu_y \sin 2\pi \xi_y = 2 \cos 2\pi \nu_y - \beta_y \delta \sin 2\pi \nu_y$$

$$\xi_y = \frac{\beta_y \delta}{4\pi} = \frac{N r_e \beta_y}{2\pi \gamma \sigma_y (\sigma_x + \sigma_y)}$$

$$\sigma_x \gg \sigma_y \text{ 이므로, } L \approx \frac{k f N N}{4\pi \sigma_x \sigma_y} \approx \frac{k f N N 2\pi \gamma \xi_y}{4\pi N r_e \beta_y} \approx \frac{k f N \xi_y \gamma}{2 r_e \beta_y}$$

luminosity는 beam-beam tune shift에 비례한다 $\xi_y \sim 0.04$ 전자/양전자
 ~ 0.01 양성자/양성자

선형 충돌 가속기에서 최대 Luminosity를 얻기 위해서 나노미터 크기의 빔사이즈를 구현하며 충돌지점에서 doublet 사극자석에 의한 매우 강한 집속을 필요로 한다.

$$L \propto \frac{N^2}{\sigma_x^* \sigma_y^*}$$

Round Gaussian beam

Gauss law 길이 L 을 갖는 빔에서 빔 축으로 부터 거리 r 에 전기장을 구하기 위해 가우스 법칙을 적용하자

$$\int E \cdot n \, da = \frac{Q}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0} \int \rho dV \quad (\rho(r) = \frac{Ne}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}})$$

$$E 2\pi r L = \frac{1}{\epsilon_0} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^r \rho(r) r dr \quad (L : \text{length of bunch})$$

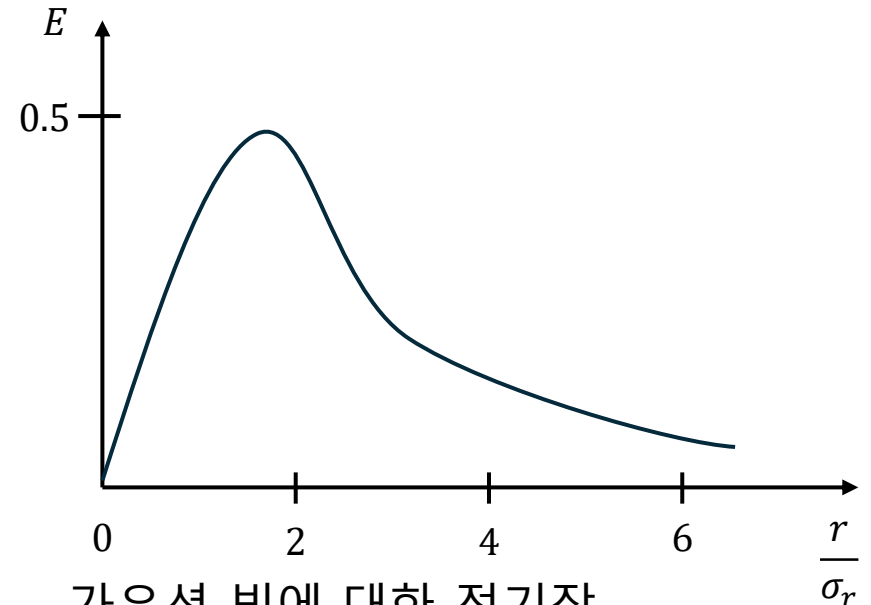
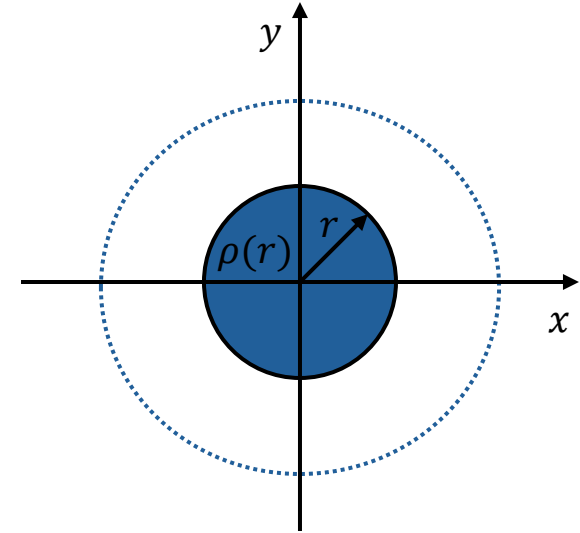
$$= \frac{Ne}{2\pi\epsilon_0\sigma^2} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^r e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}} r dr = \frac{2\pi Ne}{2\pi\epsilon_0\sigma^2} \int_0^t (-\sigma^2) e^t dt$$

$$= \frac{Ne}{\epsilon_0} (1 - e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}})$$

$$E = \frac{Ne}{2\pi\epsilon_0 r L} (1 - e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}})$$

$$= \frac{ne}{2\pi\epsilon_0 r} (1 - e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}}) \hat{r}$$

$$(n = \frac{N}{L} : \text{number of particle per length})$$



가우션 빔에 대한 전기장

Round Gaussian beam

자기장을 구하기 위해 암페어 법칙을 적용한다

$$\int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I_{enc}$$

$$\int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = 2\pi r B$$

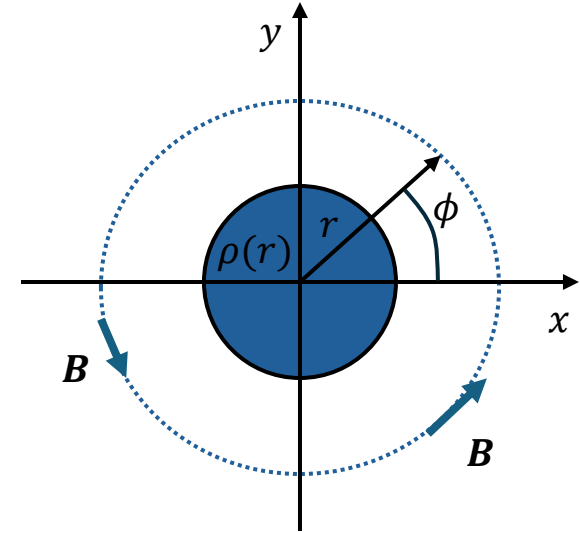
$$\mu_0 I_{enc} = \mu_0 \frac{Ne}{t} = \mu_0 \frac{Ne v}{L} = \mu_0 \frac{Qv}{L} = \mu_0 \frac{Q\beta c}{L}$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \\ = \frac{\mu_0 \beta c}{2\pi r L} \int \rho dV$$

$$= \frac{\mu_0 \beta c}{2\pi r L} \frac{Ne}{2\pi \sigma^2} \int_0^r r e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}} dr \int_0^{2\pi} d\phi = \frac{\mu_0 \beta c}{2\pi r L} \frac{Ne \sigma^2}{2\pi \sigma^2} (1 - e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}}) \cdot 2\pi$$

$$B_\phi = \frac{\mu_0 \beta c Ne}{2\pi r L} (1 - e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}}) \hat{\phi}$$

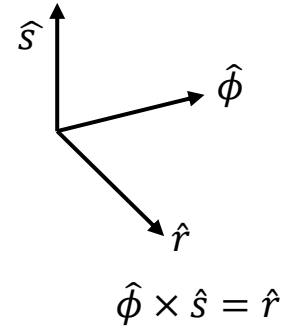
$$B_\phi = \frac{\beta}{c} E_r$$



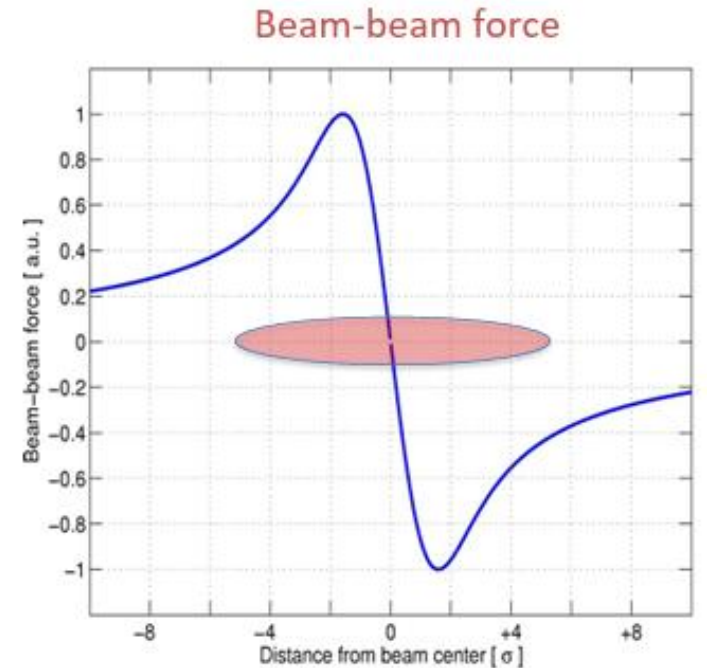
Round 가우션 빔에 대한 로렌즈 힘

전자가 상대편 빔(양전자)를 통해 $-\hat{s}$ 방향으로 움직일때 겪는 로렌즈힘은

$$\begin{aligned}
 F &= -e(E + v \times B) \\
 &= -e \left(E_r \hat{r} - v \hat{s} \times \frac{\beta}{c} E_r \hat{\phi} \right) \text{ 전자 } (-\hat{s}) \text{와 양전자 } (\hat{s}) \text{는 서로 반대방향으로 운동함} \\
 &= -e E_r \left(\hat{r} - \frac{v^2}{c^2} \hat{s} \times \hat{\phi} \right) \\
 &= -\frac{Ne^2}{2\pi\epsilon_0 r L} (1 - e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}}) \left(\hat{r} - \frac{v^2}{c^2} \hat{s} \times \hat{\phi} \right) \\
 &= -\frac{Ne^2}{2\pi\epsilon_0 r L} (1 - e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}}) \left(1 + \frac{v^2}{c^2} \right) \hat{r} \\
 &\approx -\frac{Ne^2}{\pi\epsilon_0 r L} (1 - e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}}) \hat{r}
 \end{aligned}$$



$$\left(c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}, \quad \beta = \frac{v}{c} \approx 1 \right)$$



가우션빔 충돌중 각방향 변화

힘은 번치 길이 L에 대해서 계산하며 두 빔의 상대 속도는 $2c$ 이다
 횡방향 angular kick은 번치 길이에 대해서 적분을 하여 얻는다.

$$P_r = \int_{-\infty}^{\infty} F(2ct)dt = \frac{1}{2c} \int_{-\infty}^{\infty} F(z)dz$$

$$= \frac{1}{2c} F(z)L = -\frac{Ne^2}{2\pi\epsilon_0 cr} (1 - e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}})$$

angular kick $\Delta r' = \frac{P_r}{P_0} = -\frac{2Nr_e}{\gamma} \frac{1}{r} (1 - e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}})$ $(r_e = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 mc^2})$
 $(p_0 = mc)$

수직 방향 $\Delta y' = -\frac{2Nr_e}{\gamma} \frac{y}{x^2 + y^2} (1 - e^{-\frac{x^2 + y^2}{2\sigma^2}})$

수평 방향 $\Delta x' = -\frac{2Nr_e}{\gamma} \frac{x}{x^2 + y^2} (1 - e^{-\frac{x^2 + y^2}{2\sigma^2}})$

선형 근사와 Disruption

Round beam의 경우 빔 축 근처의 전기장은 선형적이며 근사를 취하면 $\Delta r' = \frac{p_r}{p} = -\frac{Nr_e}{r \sigma^2} r$ 이다.

가우션 횡방향 빔 분포 경우 빔 kick은

$$\Delta x' = \frac{dx}{ds} = -\frac{2Nr_e}{\gamma \sigma_x(\sigma_x + \sigma_y)} x \qquad \Delta y' = \frac{dy}{ds} = -\frac{2Nr_e}{\gamma \sigma_y(\sigma_x + \sigma_y)} y$$

번치는 상대편 방향에서 운동해오는 입자에게 집속 렌즈와 같은 역할을 하며 초점거리가 $\frac{1}{f_{x,y}} = \frac{2Nr_e}{\gamma \sigma_{x,y}(\sigma_x + \sigma_y)}$ 인 렌즈와 동일하다.

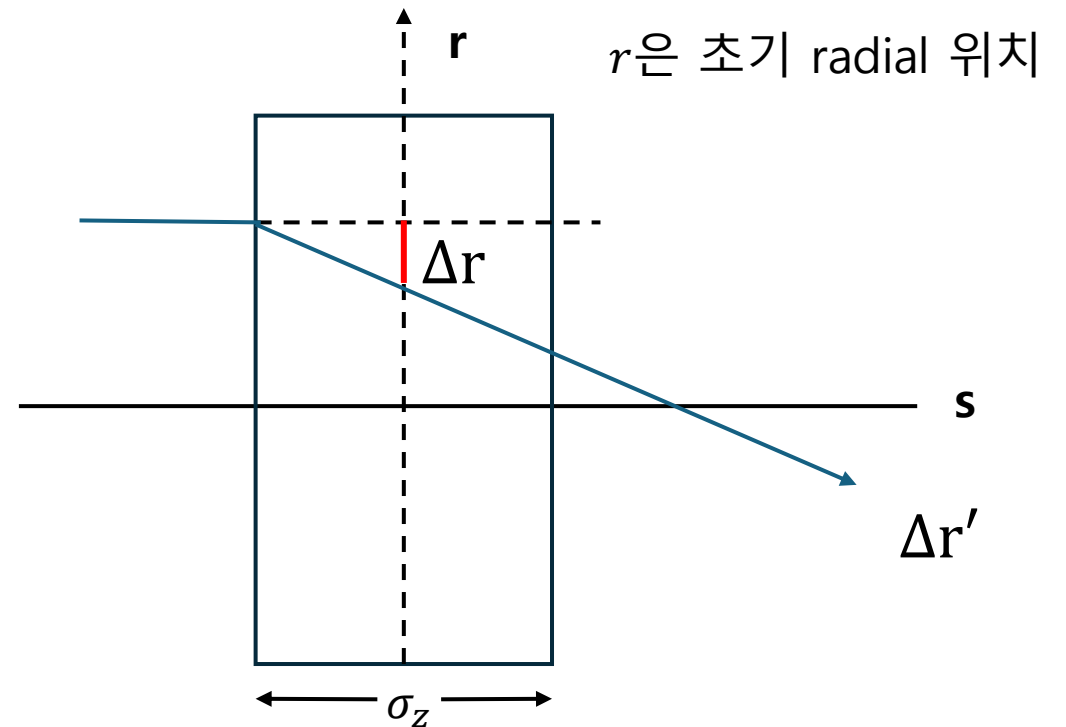
CLIC, ILC에 대하여 $f_y \sim 10\mu m \ll \sigma_z$

선형 근사와 Disruption

만약 렌즈가 선형 충돌 가속기처럼 매우 강할 경우, 입자 기울기 $\Delta r'$ 및 위치 r 은 상대편 빔을 통과할 시 변화가 생긴다

$$\Delta r = \Delta r' \cdot \sigma_z$$

$$\Delta r' = -\frac{r}{f} \text{ 로 부터 } \Delta r = -\frac{\sigma_z}{f} r$$



Disruption Limits

선형 충돌 가속기에서, 횡방향 위치에서 상대적인 변화를 Disruption 파라미터로 나타낸다

$$D = \frac{\Delta r}{r} = -\frac{\sigma_z}{f} \quad D_{x,y} = \frac{2Nr_e}{\gamma} \frac{\sigma_z}{\sigma_{x,y}(\sigma_x + \sigma_y)}$$

작은 disruption $D < 1$ 은 들어오는 빔에 얇은 렌즈로써 작용함을 의미한다.

상대편 빔의 전기장이 강할때, disruption은 $D > 1$ 이며 입자가 상대편 빔 포텐셜을 통과할 때 진동한다.

D 가 매우 클 경우, 작은 빔-빔 offset의 존재에서 luminosity를 크게 낮추는 빔 불안정성이 발생한다.

이와 같은 disruption 영향의 계산은 컴퓨터 시뮬레이션으로 진행된다.

Disruption Angle

Disruption은 기준 deflecting 각도에 의해 특징된다.

$$\theta_0 = \frac{2Nr_e}{\gamma(\sigma_x + \sigma_y)} = \frac{D_x}{\sigma_z} \sigma_x = \frac{D_y \sigma_y}{\sigma_z}$$

$D \gg 1$, 입자들은 빔 내에서 움직이며, 두꺼운 렌즈 근사 및 강-강 시뮬레이션이 요구된다

$D \ll 1$, 입자들은 빔 내에서 거의 움직이지 않으며, 얇은 렌즈 근사 및 강-약 시뮬레이션으로 충분하다

ILC 경우, 질량 중심 에너지는 500GeV , 번치 길이는 $300\mu\text{m}$, 충돌 지점 빔 크기 (x,y) 는 $474\text{nm}/5.9\text{nm}$, 수직 및 수평 disruption은 각각 24.3 및 0.3이다.

Disruption Parameter

$$D_{x,y} = \frac{2r_e N \sigma_z}{\gamma \sigma_{x,y} (\sigma_x + \sigma_y)} \approx \frac{\sigma_z}{f_{beam}}$$

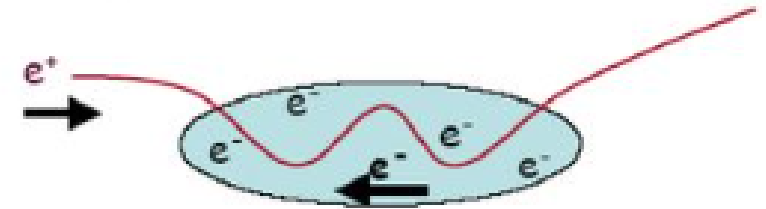
f_{beam} 는 빔 렌즈의 초점거리이다.

저장링 : $f_{beam} > \sigma_z$, $D_{x,y} \ll 1$

LC : $f_{beam} < \sigma_z$, $D_y \approx 10 \sim 20$

Enhancement 인자 ($H_D \sim 2$)

$$H_{Dx,y} = 1 + D_{x,y}^{\frac{1}{4}} \left(\frac{D_{x,y}^3}{1 + D_{x,y}^3} \right) \left[\ln(\sqrt{D_{x,y} + 1}) + 2 \ln\left(\frac{0.8\beta_{x,y}}{\sigma_z}\right) \right]$$



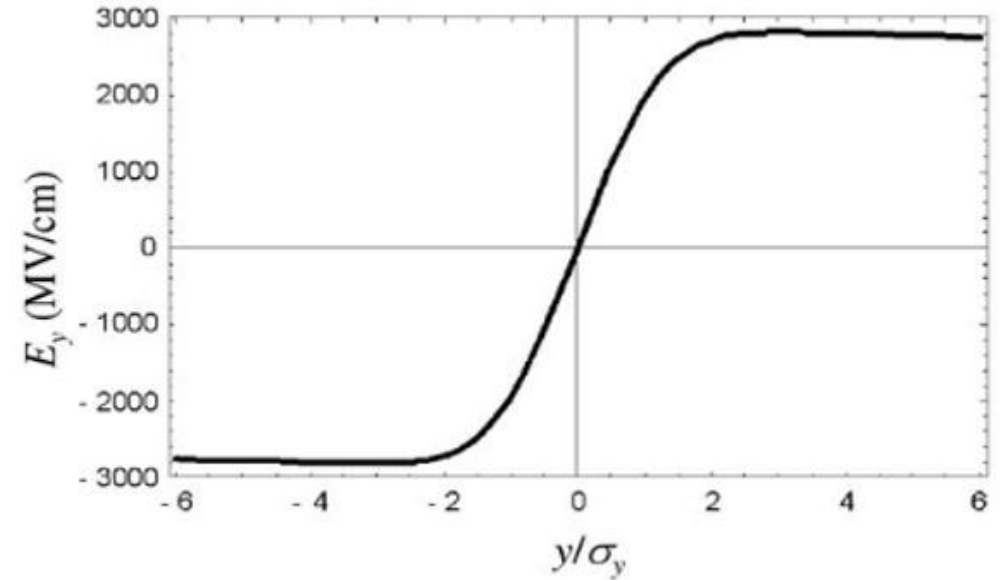
Beamstrahlung : 상대방 번치의 filed내
에서Synchrotron radiation

Smears out Luminosity
Creates e+e- pairs
background in detector

Pinch effect

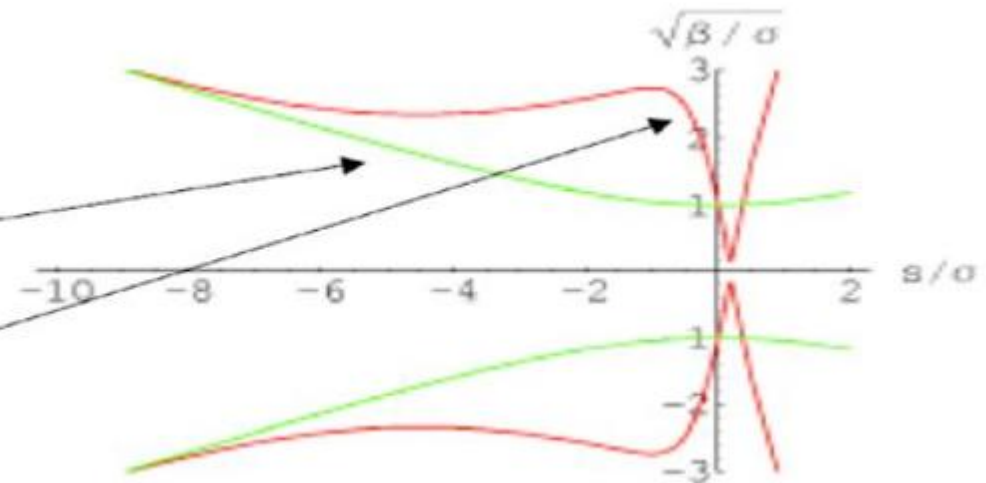
Strong electromagnetic field of the opposing bunch :

- deflects the particles "beam-beam kick"
- focuses the bunches "pinch effect"
- Luminosity enhancement factor H_D



Beam envelope w/o beam-beam

Beam envelope with beam-beam



Hour – glass 영향

bunch length는 0이 아니어서 hour glass 형태의 횡방향 빔 형태를 가지며 Effective luminosity는 감소한다

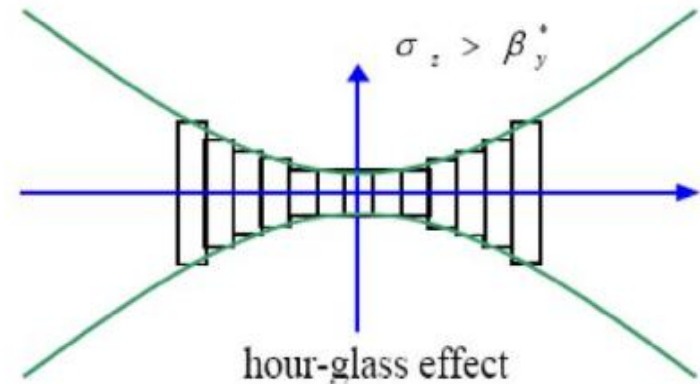
충돌지점 근처에서 횡방향 빔 사이즈는 일정하지 않고 베타함수 값에 따라 변한다

$$\beta(s) = \beta^* \left[1 + \left(\frac{s}{\beta^*} \right)^2 \right]$$

베타함수 값은 충돌점에서 거리의 제곱으로 커진다.

횡방향 빔 사이즈는 $\sigma(s)$ 는 상수이지 않고 작은 β^* 에 대해서 s 에 대해 빠른 증가를 보인다

$$\sigma_{x,y} = \sigma_{x,y}^* \sqrt{1 + s^2 / \beta_{x,y}^2}$$



Hour – glass 영향

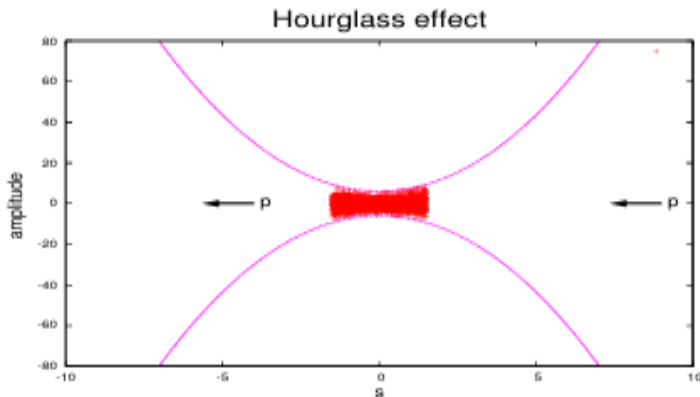
$\beta_y < \sigma_z$ 일 경우 횡방향 빔 사이즈 최소점에서 모든 입자들이 충돌하지 않으므로 Luminosity가 감소한다(Rule : $\sigma_z < \beta_y$)

긴 번치 길이 및 작은 β^* 에서 Hour glass 영향이 커짐.

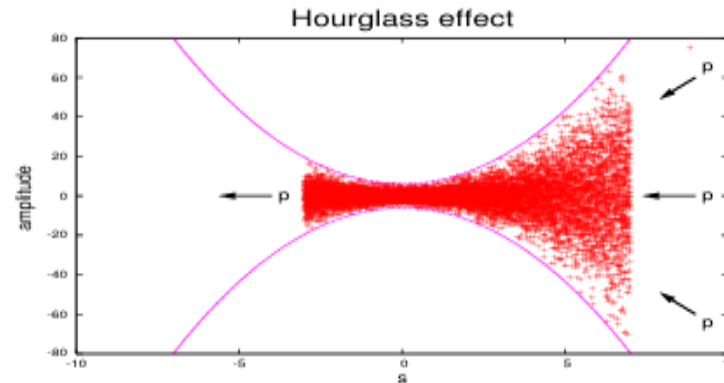
$L(0)$: Luminosity without hour glass

$$\frac{L(\sigma_z)}{L(0)} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{e^{-u^2}}{\left[1 + \left(\frac{u}{u_x}\right)^2\right]} du \quad (u_x = \beta^* / \sigma_z)$$

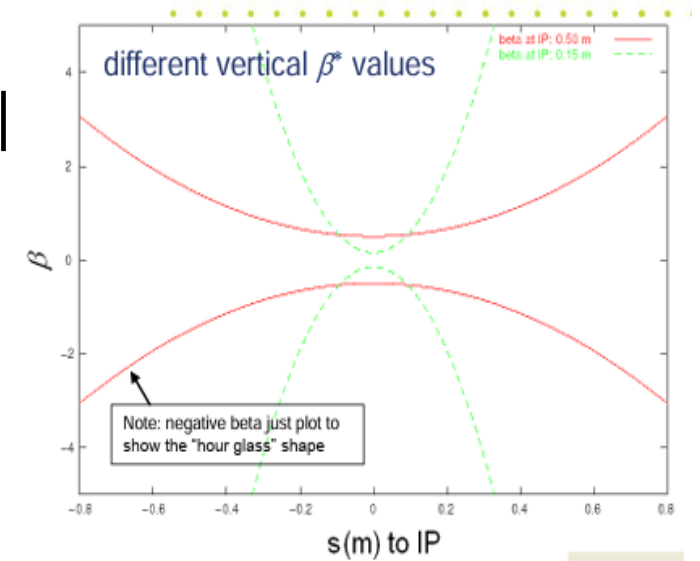
$$= \sqrt{\pi} u_x e^{u_x^2} \operatorname{erfc}(u_x)$$



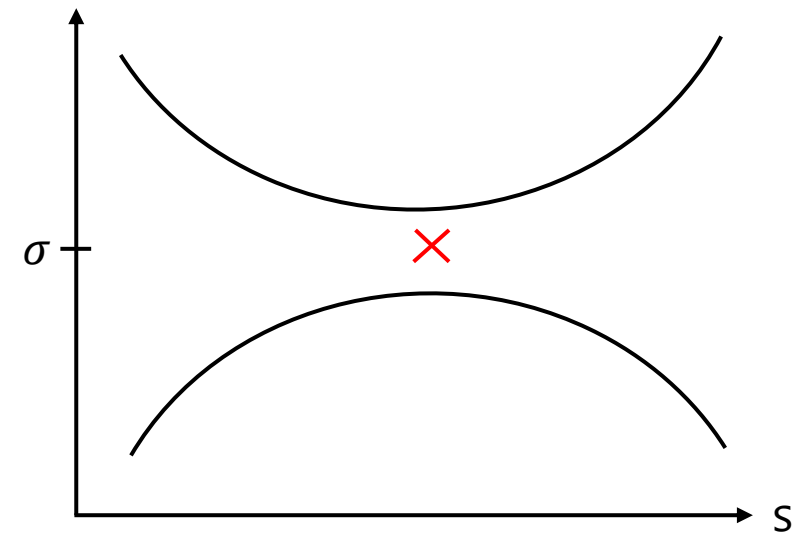
Small variation of beam size along bunch



Significant effect for long bunches and small β^*



빔 사이즈



×

: 여기서 모두 충돌하지 않고 큰 빔 사이즈 위치 내에서도 충돌

Luminosity : RF Power

$$L = \frac{n_b N^2 f_{req}}{4\pi\sigma_x\sigma_y} H_D$$

Center of mass energy : E_{CM}

$$n_b N f_{req} E_{CM} = P_{beam} = n_{RF \rightarrow beam} P_{RF},$$

n : RF to beam power efficiency

$$L = \frac{(E_{CM} n_b N f_{req}) N}{4\pi\sigma_x\sigma_y E_{CM}} H_D = \frac{n_{RF} P_{RF} N}{4\pi\sigma_x\sigma_y E_{CM}} H_D$$

$$L \propto \left(\frac{N}{\sigma_x \sigma_y} H_D \right) P_{beam}$$

- Beam – Beam effects
 - 강한 자체 집속(pinch effect) → Luminosity 증가
 - beamstrahlung → photon emission
 - : dilutes luminosity spectrum
 - : creates detector background
- Strong focusing needed for small size
 - optical aberrations
 - stability issues and tolerances

Luminosity

충돌점에서 빔 사이즈를 다시 쓰면 $L \propto \frac{N}{\sigma_x \sigma_y} P_{beam} = \frac{N}{\sqrt{\beta_x \varepsilon_x} \sqrt{\beta_y \varepsilon_y}} P_{beam}$

에미턴스 $\varepsilon_{x,y}$ 는 빔 특성이며, 더 작은 에미턴스는 다른 빔 광학계를 요구한다.

베타함수 β 는 집속계 특성이며 더 강한 집속은 luminosity를 증가할 수 있다.

너무 낮은 베타 함수는 hour-glass 영향으로 인해 luminosity를 감소시킨다

$$\sigma_{x,y} = \sigma_{x,y}^* \sqrt{1 + z^2 / \beta_{x,y}^2}$$

$\beta \geq \sigma_z$ 인 제한 조건은 수평 방향 운동보다 수직 방향 운동에서 더 중요하다.

실제로 빔 길이는 0이 아니며, hour-glass 형태의 횡방향 빔 프로파일을 가지며, 이때 Luminosity는 감소한다.

Pinch and luminosity enhancement

빔 충돌 중에는 번치들이 서로 집속(자체 집속 또는 Pinching) 되어서
Luminosity 증가를 가져온다

$$L = H_D \frac{N^2 n_b f_r}{4\pi \sigma_x^* \sigma_y^*}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{x0}^* &> \sigma_x^* \\ \sigma_{y0}^* &> \sigma_y^*\end{aligned}$$

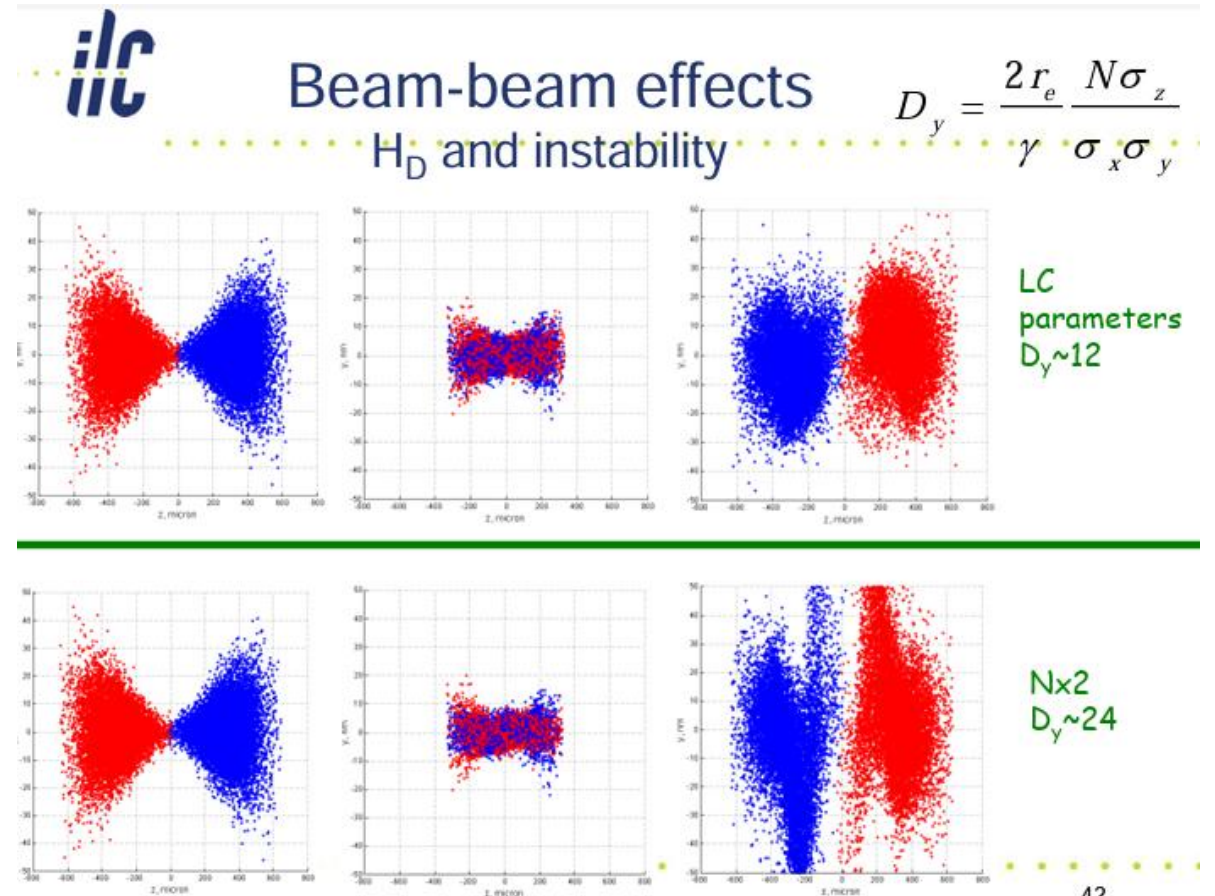
$$H_D = \frac{L}{L_0} = \frac{\sigma_{x0}^* \sigma_{y0}^*}{\sigma_x^* \sigma_y^*}$$

n_b : bunches/train

N : particles/bunches

f_r : repetition frequency

H_D : beam – beam enhancement factor
(linear collider : ~2)



Crossing Angle

빔들간의 충돌각은 빔들간 기생 충돌의 영향을 최소화 하거나
충돌 후 버리는 빔을 제거하기 위해서 요구된다 (ILC: 14mrad, CLIC: 20mrad)

Crab Crossing

충돌각은 luminosity 감소를 이끈다

$$\frac{L}{L_0} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\sigma_z^2}{\sigma_x^2} (\tan \frac{\theta}{2})^2}}$$

이것은 Crab Crossing 시스템을 적용함으로써 피할 수 있으며
번치 회전을 일으켜서 충돌 시 빔을 정면충돌로 만든다

Reduction Factor

$$s = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\sigma_z^2}{\sigma_x^2} (\tan \frac{\theta}{2})^2}} \approx \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\sigma_z^2}{\sigma_x^2} (\frac{\theta}{2})^2}}$$

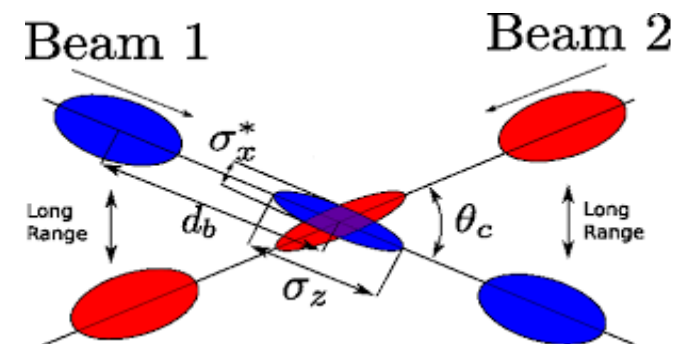
For small crossing angle

ex) LHC

$$\theta = 285 \mu\text{rad}$$

$$\sigma_z = 7.5 \text{ cm}$$

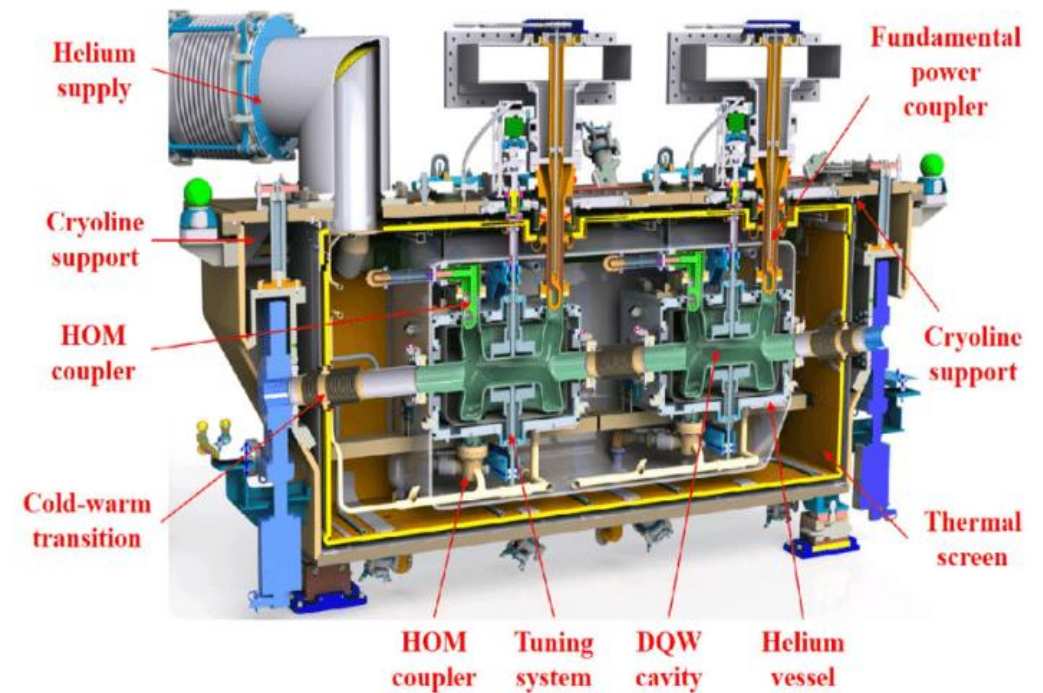
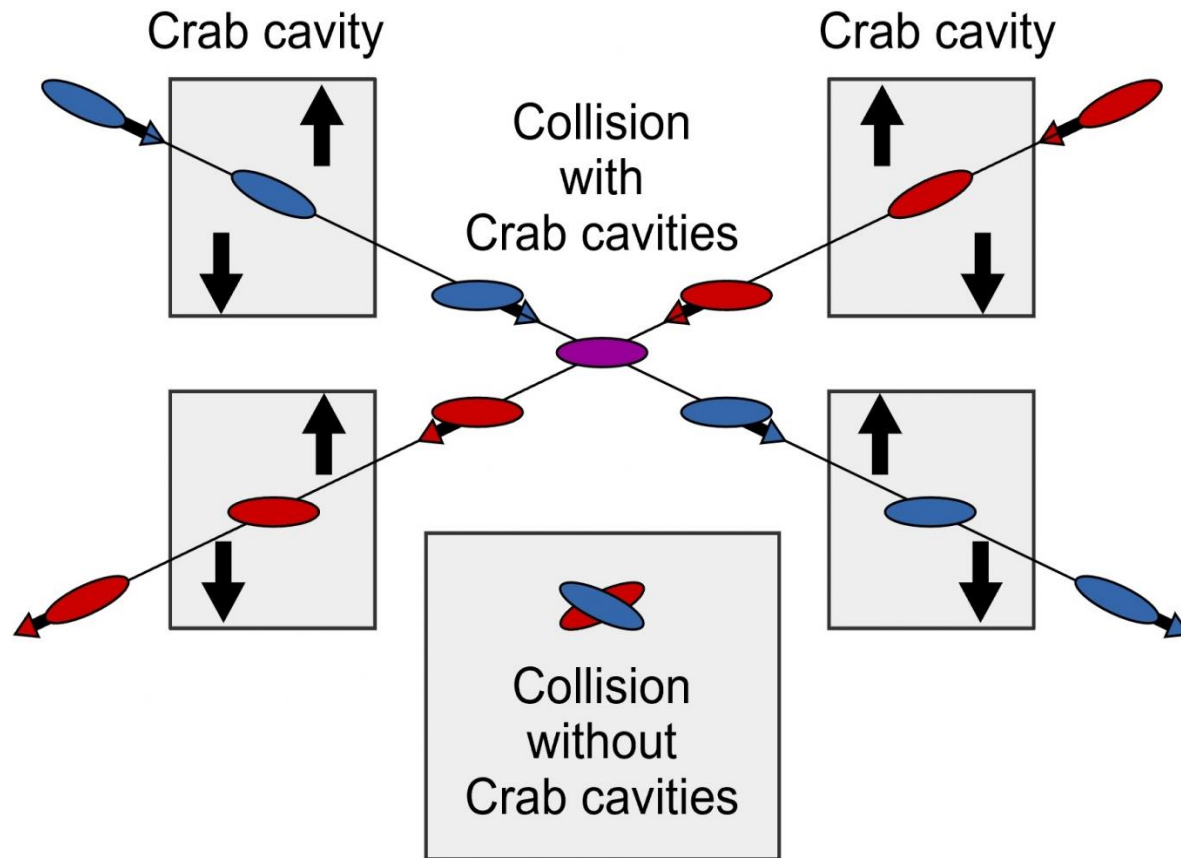
$$s = 0.84$$



Large crossing angle:
large loss of luminosity

Crab Cavity

Crab 가속관은 충돌 지점에서 충돌 빔들의 luminosity를 증가 시키기 위하여 사용되며 이러한 가속관들은 빔들을 적절한 각도로 킁 하도록 이극 전기장을 사용한다



"crab"crossing recovers geometric loss factor.

Radiation Emission

Opening cone angle은 $\frac{1}{\gamma}$ 에 비례 : $\theta_c \sim \frac{1}{\gamma}$

관측자는 방사광 길이 $l_R = \frac{\rho}{\gamma}$ 에 대해
방출된 방사광을 관측한다

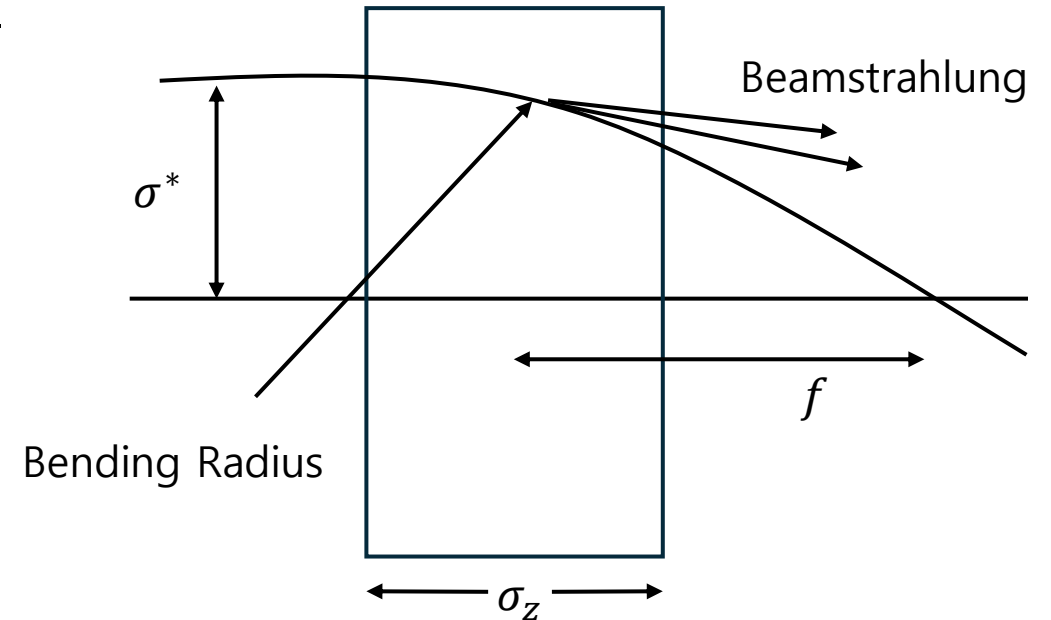
critical 에너지는 $\varepsilon_c = \hbar\omega_c = \frac{3}{2} \frac{\hbar\gamma^3 c}{\rho}$
 $\varepsilon_c [GeV] = 0.664 E^2 [TeV] B [Tesla]$

Beamstrahlung parameter

$$Y = \frac{2}{3} \frac{\hbar\omega_c}{E_0} = \gamma \frac{\langle B \rangle}{B_c} \quad (B_c = m^2 c^2 / e \hbar = 4.42 \text{ Tesla}, \text{ Schwinger 임계장})$$

빔 에너지에 critical energy의 비이다

$$\text{가우션 빔에 대한 평균값은 } \langle Y \rangle = \frac{5}{6} \frac{N r_e^2 \gamma}{\alpha (\sigma_x + \sigma_y) \sigma_z}, Y_{max} \sim 12 \frac{Y_{avg}}{5}, \quad \text{in linear collider, } Y \sim 0.1 \sim 1$$



Luminosity Issue

- Luminosity는 근사적으로 $L = \frac{n_b N^2 f_{req}}{A} H_0$ 로 주어진다

가우시안 빔 분포에 대해서는 $L = \frac{n_b N^2 f_{rep}}{4\pi\sigma_x\sigma_y} H_D$

N_b : bunch/Train

N : 입자수/bunch

f_{rep} : repetition freq

A : 충돌점에서 빔 단면적

H_D : 빔-빔 enhancement factor

- $n_b N f_{req} E_{CM} = P_{beam} = n_{rf \rightarrow beam} p_{rf}$ (n_{rf} 는 RF to 빔파워 효율성)

$$L = \frac{(E_{CM} n_b N f_{rep}) N}{4\pi\sigma_x\sigma_y E_{CM}} H_D = \frac{n_{rf} P_{rf} N}{4\pi\sigma_x\sigma_y E_{CM}} H_D$$

Luminosity는 주어진 질량 중심 빔 에너지에서 rf파워에 비례한다

- 저장링 및 선형 충돌 가속기 비교

LEP freq = 44 kHz

LC freq = few 100Hz rf 파워가 제한적이다

Luminosity에서 약 400배가 차이가 나므로
충돌점에서 빔사이즈를 매우 작게끔 LC에서 한다

Luminosity Issue

$$\text{LEP} : \sigma_x \sigma_y \approx 130 \times 8 \mu m^2$$

$$\text{LC} : \sigma_x \sigma_y \approx (200 \sim 500) \times (3 \sim 5) nm^2$$

10^6 배 차이로 $10^{34}/cm^2 sec$ 의 높은 luminosity를 얻기 위해서는 작은 빔 사이즈가 LC에 요구된다

$\eta_{Rf} p_{Rf}$: 선형 가속기 기술 즉, RF 효율성 및 power 능력에 의존

$\sigma_x \sigma_y$: 빔-빔 영향 즉 beamstrahlung 및 disruption에 의존

강집속과 관련해서는 광학계 및 tolerance와 안정성에 의존

- 빔들간의 강한 상호 간섭 혹은 luminosity enhancement H_D 를 일으킨다. 전자, 양전자가 상대방 빔의 강한 전기장을 통과 할 때 beamstrahlung 을 방출하고 빔 에너지를 잃는다.
- 강한 전기장과 beamstrahlung 포톤들의 상호작용은 막대한 e^+e^- 쌍생성을 생성 시키며 background로 된다.

Beamstrahlung

RMS 에너지 퍼짐도

$$\delta_{BS} \approx 0.86 \frac{er_e^3}{2m_0c^2} \left(\frac{E_{CM}}{\sigma_z} \right) \frac{N^2}{(\sigma_x + \sigma_y)^2}$$

Luminosity를 최대화 하기 위하여 σ_x, σ_y 를 작게하고 δ_{BS} 를 감소 시키기 위해 $\sigma_x + \sigma_y$ 를 크게 유지한다

Flat beam ($\sigma_x \gg \sigma_y$) 경우 $\delta_{BS} \propto \frac{E_{CM}}{\sigma_z} \frac{N^2}{\sigma_x^2}$ 높은 luminosity를 얻기위해 δ_{BS} 를 고정시키기 위해서 σ_x 를 고정시키고 σ_y 를 가능한 작게한다.

대부분 LC 설계 시, $\delta_{BS} \sim 3\sim 10\%$ 이다.

Beamstrahlung

H_D 를 무시하면 $L \propto \frac{\eta_{rf} p_{rf}}{E_{CM}} \left(\frac{N}{\sigma_x} \right) \frac{1}{\sigma_y}$

Flat 빔 beamstrahlung으로 부터 $\frac{N}{\sigma_x} \propto \sqrt{\frac{\sigma_z \delta_{BS}}{E_{CM}}}$

$L \propto \frac{\eta_{rf} p_{rf}}{E_{CM}^{3/2}} \frac{\sqrt{\sigma_z \delta_{BS}}}{\sigma_y}$ 이어서

높은 Luminosity를 얻기 위해서는

- 높은 RF-빔 전환율 η_{rf}
- 높은 RF 파워 p_{rf}
- 작은 수직 방향 빔 사이즈 σ_y
- 긴 빔 길이 σ_z
- 높은 beamstrahlung δ_{BS}

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{\beta_y \varepsilon_{n,y}}{\gamma}}$$

$\varepsilon_{n,y}$: 규격화된 수직 에미턴스
 β_y : 충돌점에서 수직 베타 함수

$$L \propto \frac{\eta_{rf} p_{rf}}{E_{CM}^{3/2}} \sqrt{\frac{\delta_{BS} \gamma}{\varepsilon_{n,y}}} \sqrt{\frac{\sigma_z}{\beta_y}} \propto \frac{\eta_{rf} p_{rf}}{E_{CM}} \sqrt{\frac{\delta_{BS}}{\varepsilon_{n,y}}} \sqrt{\frac{\sigma_z}{\beta_y}}$$